论在不同逻辑系统中的排中律

孙明湘

(中南大学公共管理学院哲学系，湖南 长沙，410083)

摘要：作为思维基本规律的排中律是非形式化的，它具有直观普效性；在经典的(一阶)逻辑系统内，排中律作为系统内的可证公式，具有系统内严格定义的普效性。而在非经典逻辑系统如多值逻辑、直觉主义逻辑系统中，由于对原经典逻辑中二值性、实无穷性等假定的修正，排中律不再是该类系统中的可证公式，因而丧失其有效性。作为逻辑真理的排中律同任何真理一样，是普遍性与相对性的对立统一。

关键词：排中律；普效性；逻辑系统；非经典逻辑

中图分类号：B812.1 **文献标识码**：A **文章编号**：1672-3104(2010)05−0027−03

一

排中律在传统逻辑中，与同一律、矛盾律、充足理由律一道被称为思维的基本准则，也称形式逻辑的基本规律或元规律。它的含义是，两个互相对立的思想不能都是假的，其中必有一个是真的。或者说，两个互相对立的思想，不能都加否定，必须肯定其中一个。“两个互相对立的思想”是指两个具有矛盾关系或下反对关系的命题，例如，“所有自然数都是整数”与“有些自然数不是整数”，这是一对矛盾关系的命题；“有些自然数是偶数”与“有些自然数不是偶数”这是一对下反对关系的命题。对于它们这两对具有矛盾关系和下反对关系的命题，不可能都是假的，每一对命题中必有一个是真的。因此，当我们在具体思维中，不能都加否定，必须肯定其中一个。既是思维的基本准则，自然要求在思维过程中被普遍遵循，不得违反。因而说它是普遍有效的，或者说，无论任何人，只要违反排中律，其思维就是混乱的，不合逻辑的，其逻辑错误称模棱两可或两不可。这种普效性也称直观普效性。随着现代经典逻辑的诞生，逻辑规律都被公理化、形式化在一个逻辑系统内，称为系统内定理，具有系统内的普效性。排中律除作为形式系统要遵循的元规律外，还作为系统内的定理而被形式化，比如在命题逻辑中表现为 $A\vee\neg A$，在一阶谓词逻辑中表现为 $(\forall x)(F(x)\vee\neg F(x))$，其普遍有效性也在系统内被定义为：该公式是普遍有效的，当且仅当，它在任意解释下都是真的。排中律公式与系统内其他定理也因此统称为永真式或普遍有效式。定义中的“在任意解释下为真”是有确定含义的，即在一阶逻辑的语义模型理论中的任意解释下为真。这个语义理论又是建立在下述基本原则或假定基础上的：①外延性(与内涵性相对，只考虑命题的外延即真值)；②二值性(与多值性相对，只考虑命题的真假二值，排中律即排除真假二值以外的第三中可能)；③个体域非空性(与空集相对，只考虑客观存在的个体)；④实无穷性(与潜无穷相对，只考虑封闭的无穷集)。在满足这四个假定条件下，我们说排中律具有直观普效性或经典逻辑内的普效性。当取消或修改其中任一假定，经典逻辑则扩张或变异为非经典逻辑，在非经典逻辑的不同系统中，排中律的普效性受到挑战。

二

以下分别给出非经典逻辑中三值逻辑、内涵逻辑、存在逻辑以及直觉主义逻辑几个逻辑系统对经典逻辑四假定之一的修正而导致排中律失效的实例。

1. 多值逻辑是对经典逻辑二值假定的修改，以三值逻辑为例，它认为：一个命题 A，不仅具有真假(t，f)二值，而且还有第三个值(u)(u 可解释为不定、未知、可能等)，排中律的表现形式为 $A\vee{\sim}A\vee uA$(也可表示为 $A\vee\neg A$，其否定词 $\neg$，既是对 A 的否定，也是对

收稿日期：2010−03−13
作者简介：孙明湘(1955−)，男，辽宁新民人，中南大学逻辑学教授，主要研究方向：逻辑学.

uA 的否定，它与二值逻辑中的否定词 ¬ 具有不同的含义)，它表示一个命题要么是真的，要么是假的，要么是不确定的，例如，“或者火星上有生物，或者火星上没有生物，或者火星上有无生物是不可判定的”，可用真值表判定[1](371)。A∨~A∨uA 不是经典逻辑中的永真式，因而不普遍有效。当我们在三值逻辑(Bochvar三值系统)中重新定义永真式，即一个公式是永真式(或普效式)，当且仅当对其变项的所有赋值，都不使该公式有假值。此时 A∨~A∨uA 为三值逻辑中的永真式，我们可称为排四律，意思是排除 t、f、u 以外的第四种可能。由于排中律的效用范围发生变化，作为排中律在三值逻辑中的表现形式在二值逻辑中失效(不是二值逻辑中的永真式)，而它在三值逻辑中仍然是有效的。一旦我们将第三值 u 看做是或者取真或者取假的值，A∨~A∨uA 立即降为二值逻辑的永真式。由此我们可以有排五律，排六律，甚至排 n 律，在 n ≥3 的多值逻辑系统内，排中律都在其具体的系统内有其表现形式，因而它在系统内又都是普遍有效的。

2. 对于修改外延性假定的逻辑系统，也统称内涵逻辑，它并未取消外延性假定，而是在外延性假定的基础上又引入像“必然”、“知道”、“相信”、“允许”、“禁止”等语句算子为逻辑常项，以构造模态逻辑、认知逻辑、道义逻辑等具体的内涵逻辑。由于这类命题引入了内涵性算子，其命题与该命题的否定在结构上比外延性语句复杂的多，因此排中律可能失效。例如，在某个知道逻辑系统中，Kap∨Ka¬p(Kap 表示为 a 知道p)可理解为排中律在该系统中的表现形式，但它不是该系统中的定理，即排中律在此系统中无效，因为对某个认知主体 a，命题“晨星是暮星”与其否定“晨星不是暮星”，他都不知道。当然，在内涵逻辑中并未完全抛弃外延性假定，因此，仅在外延语境(函项性原则、同一替换规则在其中适用的语境)中，排中律仍然有效。例如，在某知道逻辑系统中，Kap∨¬Kap，Pap∨Pa¬p(Pap 表示在 a 的知识库中，p 是可能的)与Pap∨¬Pap、Kap∨Pa¬p 等都是该系统中的定理；在模态命题逻辑系统内，排中律表现为 ¬□p∨□p，◇¬p∨□p，◇p∨¬□p，◇p∨□¬p 等，它们也都是系统内定理。但如果涉及到内涵语境，即函项性原则和同一替换规则不适用的语境，排中律则无效，例如，尽管“晨星”和“暮星”事实上都是指同一颗星——金星，但某人 a 完全可能不知道金星是晨星(Kap 假)，但却知道金星是暮星(¬Kap* 假)，因此如果使用同一替换规则就导致了排中律 Kap∨¬Kap*(p 表示“金星=晨星”，p* 表示“金星=暮星”)在内涵语境中失效。

3. 如果取消个体域非空的假定，即个体域为空集，则排中律失效。罗素给出的实例是“当今的法国国王是秃子(p)”和“当今的法国国王不是秃子(¬p*)”都是假的，因为当今的法国根本就没有国王。但他认为这一排中律失效的疑难是可以化解的。他在他的摹状词理论或存在逻辑[2](34-40)中论述道：“当今的法国国王不是秃子(¬p*)”是对“当今的法国国王是秃子(p)”的错误否定，而正确的否定应该是“并非当今的法国国王是秃子(¬p)”，它等值于这样一个命题：“或者当今的法国国王不存在，或者当今的法国国王不只一个，或者当今的法国国王不是秃子”，在这种情况下，排中律并不失效，因为“当今的法国国王是秃子(p)”与“并非当今的法国国王是秃子(¬p)”，这两个命题不能都假，当 p 假时，¬p 一定真。

4. 真正对排中律构成挑战的是将经典逻辑中的实无穷假定修改为潜无穷的直觉主义逻辑[3](273)。实无穷假定是将无穷视为实际存在的、已经构造完成的、可以认识的整体。正因为如此，我们才可以说，对于全域中的任一对象或者具有某性质，或者不具有某性质。或者说，任一命题及其否定不能都假，必有一真。而直觉主义逻辑中的潜无穷假定却否认无穷是完成的、固定的实体，认为无穷是潜在的，处在不断构造过程中的、开放的、发展中的整体。另外，直觉主义逻辑对命题的真值做了不同于经典逻辑中对命题真值的符合论解释，它认为一个命题是真的，是指该命题有一个可构造性的证明(简称可证)。例如，给出命题“存在一个自然数是奇素数”的可证性，就是在潜无穷的自然数中实际找到或能保证找到一个奇素数。排中律 A∨¬A，在直觉主义逻辑中即 A 可证或¬A 可证。但在直觉主义逻辑潜无穷假定下，A 与其否定命题¬A 都可能不可证，即排中律失效(或 A∨¬A 不是直觉主义逻辑中的定理)。例如，命题 A“所有人都会死”与¬A“有些人不会死”都不可证。因为，在潜无穷的人的集合中，我们无法断定所有人具有或不具有“会死”的性质。具体说，欲证 A 真，由于不能直接证明(若全称命题 A 的主项是一归纳集合，可以运用数学归纳法证明其有性质 p)，试用反证法，先假定 A 假，即证¬A 真，也即证明“有些人不会死”，但在潜无穷域中，此命题亦不可证。由此 A 与¬A 都不可证，排中律无效。由此我们还可推论出反证法(经典逻辑中的否定消去规则 $\neg_-$：若 ¬A→B∧¬B 则 A)在直觉主义逻辑中不成立。

三

以上论述说明，在经典逻辑中普遍有效的排中律，

在非经典逻辑中未必有效。因为经典逻辑是建立在上述四个假定或基本原则之上的。修改其中任一假定的非经典逻辑都可能导致排中律在其中失效。正如马克思主义哲学所说的：任何真理都是相对的，都有一定的适用范围和条件，离开这一定的范围或条件，真理也就向谬误转化。任何真理当然也包括逻辑真理(逻辑中的重言式或普遍有效式即为逻辑真理)。作为逻辑真理的排中律也是如此。还需要强调的是，非经典逻辑不论是在经典逻辑基础上的扩张或是变异，都只是对经典逻辑的局部修正，而不可能是根本修正。排中律也只是在某些非经典逻辑中不是普效式，或者说只是能找到反例的可满足式。仍以直觉主义逻辑为例，它所倡导和积极从事的直觉主义数学是对构造性数学的重大贡献，它从构造性观点出发，认为排中律虽然没有被证明为真，但也没有被证明会导致荒谬；它是一个不导致荒谬的命题。相反，谁要是说排中律荒谬，他便陷入荒谬，即布劳维尔的“排中律荒谬的荒谬(¬¬(A∨¬A))”。但布劳维尔绝对否定非构造性数学则是错误的。构造性数学和非构造性数学是数学的两个方面，都是关于世界的形式方面的认识，布氏片面强调构造性，比如导致他接受潜无穷立场和拒绝对无穷集合使用排中律，结果不得不舍弃古典数学中的大部分宝藏。这是对数学的很大伤害。正如真理具有相对性也具有绝对性一样，排中律的有效性除了上述所分析的相对性外，也具有绝对性，即在它所适用的范围内，“任意两个对立的思想(一个思想与其否定)都不能为假，必有一真”这一排中律的内容又是无条件的。这种用自然语言描述的，非形式化的，作为思维基本规律的排中律，还广泛应用于元逻辑的研究(通常以有穷性作为研究方法或工具)，例如，在讨论一逻辑系统的完全性时，其古典完全性指对于任一公式 A 而言，或者 A 是可证的，或者¬A 是可证的。其语义完全性是指对于任一公式 A，如果 A 是普遍有效的，则 A 是该系统中可证的；如果 A 不是普遍有效的，则¬A 是可满足的。显然，这都是对排中律的具体应用。总之，排中律的普效性是相对性与绝对性的辨证统一。

参考文献：

[1] S.C.克林. 元数学导论·下册[M]. 北京：科学出版社, 1984.

[2] 陈波. 逻辑哲学[M]. 北京：北京大学出版社, 2005.

[3] 张家龙. 数理逻辑发展史[M]. 北京：社会科学文献出版社, 1993.

On the logic of the system in different laws of the excluded middle

SUN mingxiang

(School of Public Administration, Central South University, Changsh 410083, China)

Abstract: As the basic laws of thought of non-formal law of excluded middle, it has an intuitive of universal validity ,in the classical(first-order)logic system, the law of the excluded middle, as evidenced by the formula within the system with strictly defined and within the system of universal validity. In the nonclassical logical systems such as multi-valued logic, intuitionistic logic, solid, etc. assumed infinite amendment law of the excluded middle class in the system is no longer provable formula, thus the loss of its effectiveness. As a logical truth, law of the excluded middle, like with any truth, is relative universality and unity of opposites.

Key Words: the law of excluded middle; universal validity; logistic system; non-classical logic

[编辑：颜关明]