数理逻辑中的归纳定义和归纳证明

孙明湘, 沈旭明

(中南大学哲学系, 湖南长沙, 410083)

摘要: 运用数学归纳法能证明一个表示逻辑定理的全称命题的真实性, 即通过证明一集合对象具有某性质, 从而证明该集合所有对象具有该性质, 其原因在于用归纳法证明的集必须首先是一个用归纳定义给出的归纳集, 它是与自然数集相同的最小归纳集, 它具有封闭性, 即: 如果该集合的初始元有某性质, 并且有一生成函数使得在初始元基础上, 可不断生成新的元, 如果这些生成元也有该性质, 那么由生成元运用生成函数所生成的其他生成元, 也有该性质, 于是可断定, 该集合中所有元都有该性质。归纳集所具有的这种封闭性质, 就是数学归纳法原理。它是一前件真而后件不能假的蕴涵命题, 因此归纳证明实际是通过证明它的前件(奠基和归纳两步)真, 从而证明后件(归纳命题)必然真的演绎证明。

关键词: 归纳集; 归纳定义; 封闭性; 归纳证明

中图分类号: B813 **文献标识码**: A **文章编号**: 1672-3104(2004)01-0016-05

一

数理逻辑中的许多基本概念的定义, 以及与这些基本概念相关的逻辑定理的证明, 都广泛地运用了数学归纳法, 我们分别简称作归纳定义和归纳证明。数学归纳法(包括其他数学方法)的引入, 使古老的逻辑学作为一门形式科学变得更为严格和精确。那么, 什么是数学归纳法, 它如何运用于逻辑学中的定义和证明? 要回答这个问题, 我们必须引入一个更为基本的概念: 归纳集合。先看一个简单的、人们熟悉的归纳集合, 即自然数集 $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$。要确定 N, 可先给出一个特殊的元素 0, 称为初始元, 它是产生 N 的基础。然后再给出一个由自然数产生自然数的运算, 即一元后继运算 $n'(= n + 1)$。这个运算作用在初始元 0 上得到 1, 再作用在 1 上得到 2, 把这个过程一直继续下去, 就可以依次把所有自然数产生出来。这个后继运算 n' 有一个性质, 即当 $n \in N$ 时, 则 $n' \in N$。我们称该性质为 N 在一元运算 n' 下封闭, 或称一元运算 n' 在 N 上是封闭的。现在我们给出归纳集的定义。

定义: 一个集合 S 是归纳的, 当且仅当它满足以下两个条件:

(1) 有一个初始集 B(S, B 中的元称初始元, 可以是一个, 也可以是多个, 甚至无穷个;

(2) 有一个生成函数(运算)集 F(S, F 中的一个 n 元函数(运算) f^n 在 S 中封闭, 即若 $x_1, \ldots, x_n \in S$, 则 $f^n(x1, \ldots, x_n)$ 有定义, 且 $f^n(x_1, \ldots, x_n) \in S$。

根据归纳集的定义, 可知一自然数集 N 就是一归纳集。即: 第一, 它有一个初始集 B, B 含有一个初始元 0, $0 \in N$; 第二, 它有一个一元后继生成函数 n', $n' \in F$, 并且对于所有自然数 n, 若 $n \in N$, 则 $n' \in N$, 即 n' 在 N 上是封闭的。由此可判定 N 就是一归纳集($N \subseteq S$)。但在事实上, 具有满足上述二条件的归纳集可以有很多, 而不限于自然数集, 它们可以是 N, 也可以是和 N 不同的 M。上述给出的自然数生成过程中, 只确定了哪些对象是自然数, 而并没有确定哪些对象不是自然数。因此要唯一地刻画 N, 就必须说 N 是满足上述条件(即有 0 且在 n' 下封闭)的最小集(即它被包含在任何满足此条件的集中)。为了表明自然数集是归纳集的最小集, 我们给出自然数的严格定义:

(1) 0 是自然数;

(2) 若 n 是自然数, 则 n' 也是自然数;

(3) 只有由(i)和(ii)生成的是自然数。

上述定义中的(i)和(ii), 其公式为: $0 \in N \wedge (n \in N(n' \in N)$, 它表明怎样的对象是自然数, 即断定 N 是一归纳集。(iii)的公式为: $\forall n \in N(n = 0 \vee$

收稿日期: 2003-06-10

作者简介: 孙明湘(1955-), 男, 辽宁新民人, 中南大学副教授, 主要研究方向: 逻辑学, 哲学.

$\exists x \in N(x = n')$), 它表明怎样的对象不是自然数, 即断定自然数仅仅由 0 与后继数组成, 也即断定 N 是归纳集中最小的那个集合。

这种用来定义自然数或归纳集的定义, 被称为归纳定义。所谓归纳定义, 就是给出一组规则, 由这些规则确定某一类对象或元是从开始集 B 使用 F 中的函数所产生的集(即归纳集), 同时确定只有这些规则生成的对象才是这个集合的元。显然, 按此定义所得到的任一归纳集合都是与自然数集相等的一个最小归纳集。在逻辑演算的形式系统中, 许多基本概念都是一个和自然数类似的归纳集合, 例如"合式公式"、"形式定理"、"可推演性"等; 以下我们给出一阶逻辑 L 系统形式语言中合式公式的归纳定义的实例。

合式公式定义:

(1) $\Gamma(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)$ 是合式公式(简称公式);

(2) 如果 A 是公式, 则($\neg A$) 是公式;

(3) 如果 A 和 B 是公式, 则($A \wedge B$), ($A \vee B$), ($A \rightarrow B$), ($A \leftrightarrow B$) 是公式;

(4) 如果 A 是公式且 Δ 是 A 中一个体变项且 A 中没有带 Δ 的量词出现, 则 $\forall \Delta A$ 和 $\exists \Delta A$ 是公式;

(5) 只有适合以上(1) —(4) 条的是公式。

上述定义规定了一个与自然数相等的最小归纳集即合式公式集, 定义中(1) —(4) 表示哪些对象是一阶逻辑的公式; (5) 表示哪些对象不是一阶逻辑的公式; 其中(1) 给出公式集的初始元, 即一个带有 n 元个体变项 Δ 的谓词 $\Gamma(\Gamma(\Delta_1, \ldots, \Delta_n) \in$ 初始集 B, 且 $B \subseteq S$), 当 n= 0 时, Γ 为任意命题变项; (2) —(4) 分别给出一个生成函数集 F($F \subseteq S$), F 的元有 $f^{\neg}$、$f^{\wedge}$ $f^{\vee}$ $f^{\rightarrow}$ $f^{\neg}$ 它们又称真值函数, 其定义可见任一本逻辑教科书); f^{Q}(Q 为量词符号 $\forall$ 和 $\exists$), 它们都是由初始元(又称原子公式) 不断生成新公式的运算。反复运用定义各条, 可生成或判定一阶逻辑任意复杂的公式。

例如, 可判定符号串($\forall x(\neg Hx \rightarrow Sx) \rightarrow \exists x(\neg Hx \wedge Sx)$ (已运用括号省略规则) 是一阶逻辑的公式:

根据(1): Hx, Sx 是公式;

根据(2): $\neg Hx$ 是公式;

根据(3): $\neg Hx \rightarrow Sx$, $\neg Hx \wedge Sx$ 是公式;

根据(4): $\forall x(\neg Hx \rightarrow Sx)$, $\exists x(\neg Hx \wedge Sx)$ 是公式;

最后根据(3): $\forall x(\neg Hx \rightarrow Sx) \rightarrow \exists x(\neg Hx \wedge Sx)$ 是公式。

二

由归纳定义所定义的一个归纳集合 S 具有这样一个重要的性质(该性质是任一归纳集的元性质, 为了区别于某一归纳集的具体性质 P, 我们将该性质称为封闭性或递归性, 也表示为 S): 任意(最小) 归纳集, 如果它的初始元具有某性质, 并且如果它的生成元也有该性质, 那么对生成元运用封闭性运算而得到的其他生成元, 也有该性质, 那么, 该集合的所有元素都有该性质。仍以自然数为例:

令 P 是自然数的一个公共性质, 并令 P(n) 是一个命题, 表示自然数 n 有性质 P。现在假设命题:

(1) P(0);

(2) 所有 n, 如果 P(n), 则 P(n')

成立, 那么可得:

(3) 所有 n, P(n)。

这就是通常所说的数学归纳法原理, 用公式可表示为:

$S: P(0) \wedge \forall x \in N(P(x) \rightarrow P(x')) \rightarrow \forall x \in N P(x)$

或者表示为:

$S^*: \forall n \in N(P(m)(m < n) \rightarrow P(n)) \rightarrow \forall n \in N P(n)$

它是数学归纳证明方法(简称归纳证明) 的基础。根据该原理, 我们可在有限的步骤内, 证明自然数集中无限的元素都有某性质, 即只要证明上述命题(1) 和(2), 我们就归纳地证明了命题(3)。或者说, 只要断定上述公式的前件, 就断定了后件(根据 S^* 所给的归纳证明也称串值归纳法, 见本文最后的举例)。证明如下:

证: 令 $S = \{x \in N \mid P(x)\}$。根据以上归纳集和自然数集的定义, 可证 S 满足归纳集的两个条件, 以及 $N(S$, 因此, 对于任何 $x \in N$, P(x)。数学归纳法原理还可以一般地表示为: 设 N 是从初始集 B 使用 F 中函数产生的归纳集, 若 $S(N$, 且 $B(S$, 又 S 在 F 中的函数下封闭, 则 S= N。归纳证明就是要证明 S= N, 也即证明上述命题(3)。设 S 为从 B 并且由 B 使用 F 中函数产生的集, 有一个论述 S 中元素的命题: P

(x), 它表示 S 中的元素 x 有性质 P。为了要证明命题"所有 x, P(x)"(此命题称为归纳命题, 其中的 x 称为归纳变元), 只要证明下列两步: (1) 奠基: 证明对 B 中的任意元 a 有性质 P, 即证 P(a) 。

(2) 归纳: 对 F 中的每个函数 f_n, 任取 S 中的元 $x_1, \cdots, x_n$, 要证明在假设各 $x_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 都有性质 P (此假设称归纳假设) 的情况下, $f^n(x_1, \cdots, x_n)$ 也有性质 P, 即由 $P(x_i)$ 证 $P(f^n(x_1, \cdots, x_n))$ 。

由已给出的一阶逻辑中合式公式的归纳定义, 已知谓词公式是一归纳集。因此, 要证明所有的谓词公式都有某性质, 可以对公式作归纳证明(也称为施归纳于公式的结构), 具体地说, 要证明所有公式有性质 P, 只要证明以下两步:

(1) 奠基: 证明所有原子公式都有性质 P;

(2) 归纳: 对于任何公式 A 和 B, 在假设 A 和 B 有性质的前提下, 分别证明 $(\neg A)$ 、$(A * B)$ (* 为联结词 $\wedge$ 、$\vee$ 、$\rightarrow$ 、$\leftrightarrow$ 、$O\Delta A$ (O 为量词 $\forall$ 、$\exists$) 有性质 P。

在一阶逻辑中, 对"S 中的所有元 x 都有性质 P"的归纳命题, 通常为一个元定理或引理, 其形式为一全称命题或蕴涵命题, 例如:

(1) "每一公式所含的左括号个数与右括号个数相等";

(2) "每一含有 n 个命题变元的命题形式, 都生成一个相应的 n 元真值函数";

(3) "任一公式 A 的子公式 B, 都可替换一个与之等值的公式 C", (或者是"如果 $\vdash B \leftrightarrow C$, 则 $\vdash AB \leftrightarrow AC$");

(4) "所有从 Γ 和 A 得出 B 的推演(其中 A 保持不变), 都有从 Γ 得出 $A \rightarrow B$ 的推演", (或者是"如果 $\Gamma, A \vdash B$, A 在推演中保持不变, 则 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$");

(5) "所有形式可证明的公式都是有效的", (或者是"如果 $\Gamma \vdash A$, 则 $\Gamma \vdash A$, 特殊地, 如果 $\vdash A$, 则 $\vdash A$");

等等。对于这些归纳命题, 我们都可用归纳方法证明, 以上述命题(1) 为结论, 归纳证明如下:

证: 施归纳于公式 A 的结构。

奠基: A 是原子公式, 即 A 是具有形式 $\Gamma(\Delta_1, \cdots, \Delta_n)$ 的公式, (根据项的定义) $\Delta_1, \cdots, \Delta_n$ 中都没有括号, 因此, A 中只有一个左括号和一个右括号。所以结论对 A 成立。

归纳: $A = \neg B$, 假定 B 有性质 P, 证 $\neg B$ 有性质 P。根据归纳假设, 结论对 B 成立。由于除了 B 中的括号外, A 中没有其它的括号。所以结论对 A 成立。

$A = (A * B)$, 假定 B 和 C 有性质 P, 证 $(A * B)$ 有性质 P。根据归纳假设, 结论对 B 和 C 成立。由于除了 B 和 C 中的括号外, A 中增加了一个左括号和一个右括号。所以结论对 A 成立。

$A = Q\Delta B$, 与 $A = \neg B$ 的情形相同。

由以上的奠基和归纳二步骤, 证明了"任一公式 A 所含的左括号和右括号的个数相等"。

三

由以上归纳证明得知, 归纳证明正是对数学归纳原理的运用, 或者说数学归纳原理为归纳证明提供了基本的前提, 可称为公理。为了表达的方便, 将上述公式简写为:

$$\vdash (A \wedge B) \rightarrow C$$

意为: 如果 A 和 B 是可证的, 则 C 是可证的, 其中 A 为 $P(0)$, B 为 $\forall x \in N(P(x) \rightarrow P(x'))$, C 为 $\forall x \in N P(x)$。符号 $\vdash$ 表示该公式是一可证式或普效式。

归纳证明的奠基和归纳两步骤分别为, 证明了 A 且证明了 B, 表示为:

$$\vdash A \wedge B$$

根据归纳原理, 一旦证明了 A 和 B, 则归纳命题 C 得证, 即:

$$\vdash C$$

由上述归纳原理的简写公式到归纳命题 C 的证明过程可知: 归纳证明实际是一个演绎证明。它所遵循的是一条演绎规则, 即: 从 α 和 $(\alpha \rightarrow \beta)$ 可得到 β, 这条规则保证了我们由前提 α (即归纳证明中的奠基和归纳两步骤: A 和 B) 和前提 $(\alpha \rightarrow \beta)$ (即数学归纳原理: $\vdash (A \wedge B) \rightarrow C)$), 就可推出结论 β (即归纳命题: C), 由于归纳原理是一逻辑真的命题(可看作是一前件真而后件不可能假的严格蕴涵式), 运用归纳证明所得的结论 C 也是必然真的, 记作 $\vdash C$。

显然, 归纳证明不同于传统归纳逻辑中的简单枚举归纳推理(简称归纳枚举), 后者是在前提中考察了一类事物的部分对象, 发现它们都具有某性质, 并且没有遇到相反的情况, 于是推出该类对象都具

有该性质。例如, 从 4 是两个素数之和(4= 2+ 2) , 6 是两个素数之和(6= 3+ 3) , 8 是两个素数之和(8= 3 + 5) , 推出任何大于 2 的偶数都是两个素数之和。其推理形式可表示为:

$$Px_1 \wedge Px_2 \wedge Px_3 \cdots Px_n \rightarrow \forall x Px$$

该推理形式不能保证当前提真时而结论必然真。即使你枚举了 1000 个偶数(n= 1000) , 它们都是两个素数之和(Px) , 也不能确保第 1001 个素数是两个素数之和。因此, 由此所得的结论"任何大于 2 的偶数都是两个素数之和"不必然真。或者说该命题未得到证明。从表面上看, 归纳证明与归纳枚举在名称上都有"归纳"二字, 都是由一集合的部分对象具有某性质, 推出该集合的所有对象具有该性质。其实, 这是两种不同性质的证明或推理。通过以上的分析, 我们归纳如下:

第一, 归纳证明的对象必须是一个归纳集合, 或者说是用归纳定义给出的一个最小归纳集(见前的归纳集合的定义以及自然数或合式公式的定义) 。而归纳枚举的对象不是归纳集合, 至少没有定义或证明它是一归纳集。

第二, 一个集合是否归纳集合决定它是否具有封闭性或递归性(见前的数学归纳法原理) , 这是归纳命题结论的真实可靠性的关键。正如前面所分析的, 封闭性或数学归纳原理所表示的蕴涵式是一严格蕴涵式, 即前件真, 后件不可能假。因为具有该性质的所有元都能从生成函数中构造出来, 或者说, 后件的真已被前件的真所蕴涵。因此, 只要证明了前件(即归纳证明的奠基和归纳两步骤) , 也就证明了后件(即归纳命题得证) 。从结论的可靠性上看, 归纳证明相当于完全归纳枚举(亦属演绎推理) , 所不同的是, 归纳证明无须列举一集合中的每一个元都有某性质, 最后才得出该集合所有元都有某性质(事实上, 对于一个无穷集的元是不能遍举的) , 而是仅仅根据归纳集的生成函数的封闭性, 从归纳集的部分元有某性质, 就可以必然推出该集合所有元都有某性质。

最后, 给出一阶逻辑中基本概念"以 Γ 为前提的推演"的归纳定义和基本定理"演绎定理"的归纳证明的两个实例。

例 1 定义"以 Γ 为前提的推演"是一个有穷的公式序列 $B_1, B_2, \cdots, B_n$(记作 $\Gamma \vdash B, \Gamma = \{B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}\}, B = B_n$) , 其中每一公式 B_i($1 \leqslant i \leqslant n$) 都是满足以下条件之一:

(1) $B_i \in \Gamma$;

(2) B_i 是一公理或一已证定理;

(3) 如果 B_j($= B_k \rightarrow B_i$) 和 B_k(j、k< i) 是以 Γ 为前提所得的公式, 则 Bi 是运用分离规则(从 $\vdash A$ 和 $\vdash A \rightarrow B$ 可推出 $\vdash B$) , 从 Bj 和 Bk 中所得的公式;

(4) 如果 B_k 是以 Γ 为前提所得的公式, 则 Bi 是运用全称概括规则(从 $\vdash A$ 可推出 $\vdash \forall xA$) , 从 B_k 中所得的公式。

(5) 只有符合上述(1) —(4) 的公式所构成的序列是以 Γ 为前提的推演。

例 2 证明"如果 $\Gamma, A \vdash B$, A 在推演中保持不变, 则 $\Gamma \vdash A \rightarrow B$"(演绎定理, 其中"A 在推演中保持不变"是指对 A 中的自由变元保持不变。在该定理中, 称前件为"条件推演", 称后件为"结果推演", 证明该定理, 即证明: 任给一个"条件推演", 都能得出一个"结果推演") 。

证　令 $B_1, B_2, \cdots, B_n$($= B$) 是满足定理假设的、从 Γ 和 A 得出 B 的、其推演长度为 n 的一个推演。对"条件推演"的长度 n 施归纳证明: 对每一 $i \leqslant n$, $\Gamma \vdash A \rightarrow B_i$。

奠基: n= 1 时。B_i($= B_1$) 有三种可能: B_i 是一公理或者 $B_i \in \Gamma$ 或者 $B_i = A$。当 Bi 是一公理或属于 Γ 时, 根据上述"以 Γ 为前提的推演"的定义, 有 $\Gamma \vdash B_i$, 并且有 $\Gamma \vdash B_i \rightarrow (A \rightarrow B_i)$, 所以有 $\Gamma \vdash A \rightarrow B_i$。

归纳: n> 1 时, B_i 有五种可能, 前三种情况与奠基步同, 仅证后两种情况。即假设 j, k< i 时, 有 $\Gamma \vdash A \rightarrow B_j$($B_j = B_k \rightarrow B_i$) 和 $\Gamma \vdash A \rightarrow B_k$, 证明有 $\Gamma \vdash A \rightarrow B_i$。

情况 1: 根据归纳假设, 并应用公理(A_2) : $\vdash (A \rightarrow (B_k \rightarrow B_i)) \rightarrow ((A \rightarrow B_k) \rightarrow (A \rightarrow B_i))$, 再两次应用分离规则, 即证得 $\Gamma \vdash A \rightarrow B_i$。

情况 2: B_i 是从 B_k 应用全称概括规则并且没有以 A 中的自由变元作量化变元所得, 即 $B_i = \forall xB_k$。根据公理(A_5) : $\vdash \forall x(A \rightarrow B_k) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB_k)$。应用概括规则, 从归纳假设 $\Gamma \vdash A \rightarrow B_k$ 得 $\Gamma \vdash \forall x(A \rightarrow B_k)$, 再应用分离规则得 $\Gamma \vdash A \rightarrow \forall xB_k$, 即证得 $\Gamma \vdash A \rightarrow B_i$。

当 i= n 时, 即证得演绎定理的结论。

上述归纳证明过程也可视为串值归纳证明, 即证明: 所有 i($1 \leqslant i \leqslant n$) , 如果当 m> i 时, P(m) , 则 P

(i) 。证明分两步: 奠基: 证明当 i= 1 时, P(i); 归纳: 假设 i> 1 且 j, k< i, 有 P(j) 和 P(k), 则证明 P(i) 。当完成了这两步的证明后, 即完成了归纳命题(n(i = n) P(n) 的证明。

The definition of induction and proving of induction in mathematical logic

SUN Ming-xiang, SHENG Xu-ming

(Department of Philosophy, Central South University, Changsha 410083, China)

Abstract: Why can the truthfulness of general proposition be proved to be truth in limited process by using of the mathematical induction. That is, why can we to prove all objects in aggregation with some natures through proving one or some objects with these natures in aggregation . The reason is that the aggregation proved by induction must be the inductive aggregation that generated from the definition of induction at first , it is one of the smallest inductive aggregation like natural number aggregation , it is close. Namely : if primary elements with some natures in the aggregation, and a function can generate new elements with these natures constantly on the basis of the primary elements, other generative elements with such natures can be generated from the generative elements by using of a generative function. It can be concluded that all the elements in this aggregation possess the natures. The clothing of the inductive aggregation is the principle of mathematical induction. It is a implicative proposition that former proposition is true and latter proposition cannot be false. So inductive proof is deductive proposition through proving truthfulness of former proposition (two process of foundation and induction) to be proved that the later proposition (inductive proposition) is truth certainly.

Key words: inductive aggregation; definition of proposition; closing; inductive proof

[编辑: 颜关明]